

Wie lang sind Funktionsgraphen?

Mit Funktionsgraphen haben Sie im Mathematikunterricht schon vielfach gearbeitet. Im Folgenden können Sie die Frage erkunden, wie lang eigentlich ein Funktionsgraph als Linie ist.

Länge einer Parabel

Wie lang ist der Graph der Normalparabel zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt $(1/1)$? Erforschen Sie diese Thematik!

Allgemeine Forschungsfrage

Betrachtet wird eine beliebige Funktion f , die auf einem Intervall $[a; b]$ definiert ist. Die Forschungsfrage lautet: Wie lang ist der Funktionsgraph zwischen dem Punkt $(a/f(a))$ und dem Punkt $(b/f(b))$? Erkunden Sie diese Thematik!

Näherungsverfahren und Berechnungen am Computer

- Entwickeln und beschreiben Sie ein möglichst allgemeines Verfahren, mit dem man die Länge eines Funktionsgraphen näherungsweise und mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann.
- Setzen Sie das Verfahren mit einem Computer um. Es eignen sich dazu beispielsweise Tabellenkalkulation oder Programmiersprachen.
- Wenden Sie das Verfahren auf selbst gewählte Beispiele an und bestimmen Sie jeweils näherungsweise die Länge von Funktionsgraphen.
- Gibt es spezielle Eigenschaften, die eine Funktion haben muss, damit das Verfahren funktioniert?

Präzise Längenbestimmung mit Integralen

- Recherchieren Sie zur Thematik „Länge von Funktionsgraphen“ im Internet oder in der Fachliteratur.
- Suchen Sie einen Weg, die Länge von Funktionsgraphen mit Hilfe eines Integrals darzustellen.
- Begründen Sie diese Integraldarstellung der Länge von Funktionsgraphen.
- Wenden Sie diese Integraldarstellung auf Beispiele an und vergleichen Sie jeweils das Resultat mit numerischen Näherungsberechnungen. Bei der Bestimmung von Stammfunktionen und der Berechnung bestimmter Integrale können Webseiten mit einem sog. „Integralrechner“ bzw. Computeralgebrasysteme sehr hilfreich sein.

Beispiel

Wenden Sie Ihre entwickelten Methoden auf die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1; 1]$ an und bestimmen Sie damit die Länge des Graphen. Interpretieren Sie das Ergebnis auch geometrisch.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt „Cosinus hyperbolicus“; ihr Graph wird auch „Kettenlinie“ genannt. Untersuchen Sie diese Funktion und recherchieren Sie zu ihrer Bedeutung im Internet oder der Fachliteratur. Berechnen Sie die Länge des Graphen zum Intervall $[-1; 1]$.