

Nullstellen von Funktionen numerisch berechnen

Das Problemfeld

In Ihrer Schulzeit standen Sie bereits häufig vor der Aufgabe, die Nullstellen einer Funktion f zu bestimmen. Dies ist gleichbedeutend dazu, die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen bzw. die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x -Achse zu finden.

Wie gehen Sie hierbei vor, wenn f etwa die lineare Funktion $f(x) = 5x + 17$, die quadratische Funktion $f(x) = -x^2 + 5x + 17$ oder die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x+5} + 17$ ist?

Funktioniert solch ein Vorgehen auch bei folgenden Funktionen?

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f(x) = 2^x - x^2$$

$$f(x) = x^5 + x^2 - \frac{1}{10}$$

$$f(x) = x^x - 2$$

Es ist durchaus normal, dass man bei einer etwas komplizierteren Funktion f die Gleichung $f(x) = 0$ nicht durch algebraische Umformungen nach x auflösen kann. In diesem Fall können numerische Verfahren weiterhelfen. Mit ihnen wird das Ziel verfolgt, Näherungswerte für Nullstellen von Funktionen zu berechnen. Man beginnt mit einer ersten groben Näherung für eine Nullstelle und entwickelt daraus Schritt für Schritt immer bessere Näherungen.

Recherche nach Näherungsverfahren

Recherchieren Sie im Internet und in mathematischer Literatur zu numerischen Verfahren zum Berechnen von Nullstellen von Funktionen. Beispiele sind etwa das Intervallhalbierungsverfahren, das Sekantenverfahren, das Newton'sche Tangentenverfahren oder das Verfahren „Regula falsi“.

Umsetzung am Computer

Setzen Sie Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen von Funktionen mit einem Computer um. Es eignen sich dazu beispielsweise Tabellenkalkulation oder Programmiersprachen.

Bestimmen Sie damit Näherungen für die Nullstellen der obigen Funktionen. Überlegen Sie sich selbst weitere Beispiele.

Weiterforschen

Vergleichen Sie verschiedene Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen von Funktionen in Bezug auf Vor- und Nachteile. Untersuchen Sie dabei auch, wie schnell sie Näherungswerte einer bestimmten Genauigkeit liefern.

Gibt es Situationen, in denen das eine oder andere Verfahren versagt, d. h. keine Näherungen für eine Nullstelle liefert?