Größter gemeinsamer Teiler und Euklidischer Algorithmus

Die Mathematiker Euklid lebte etwa um 300 v. Chr. in Griechenland. Sein berühmtestes Werk sind „Die Elemente“ – ein Schriftwerk, in dem er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammengefasst und systematisiert hat. In diesem Werk wird auch ein Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen beschrieben. Dieses Verfahren wird Euklidischer Algorithmus genannt, auch wenn es bereits vor Euklid bekannt war. Du kannst es im Folgenden kennenlernen.

Größter gemeinsamer Teiler

Der *größte gemeinsame Teiler* zweier natürlicher Zahlen a und b ist die größte natürliche Zahl, die Teiler von a und von b ist. Sie wird mit $ggT(a; b)$ bezeichnet.

Bestimme $ggT(8; 6)$, $ggT(18; 6)$, $ggT(18; 7)$, $ggT(18; 27)$,
$ggT(28; 17)$, $ggT(88; 66)$, $ggT(98; 126)$.

Beschreibe ein Verfahren, wie man den ggT zweier Zahlen bestimmen kann.

Ist dieses Verfahren auch für $ggT(1234567; 7654321)$ praktikabel?

Euklidischer Algorithmus mit Subtraktionen

Überlege Dir, warum folgende Aussagen für natürliche Zahlen a, b und n mit $a \geq b$ zutreffen:

1) Wenn n die Zahlen a und b teilt, dann teilt n auch die Summe $a + b$ und die Differenz $a - b$.
2) Wenn n die Zahl b und die Differenz $a - b$ teilt, dann teilt n auch die Zahl a.
3) Die Zahlen a und b haben genau die gleichen gemeinsamen Teiler wie die Zahlen b und $a - b$.
4) $ggT(a; b) = ggT(b; a - b)$

Die letzte Gleichung kann man praktisch nutzen: Statt den ggT von a und b zu suchen, sucht man den ggT von b und $a - b$. Durch das Subtrahieren hat man kleinere Zahlen, deren ggT gesucht ist. Man kann diesen Schritt des Subtrahierens so oft hintereinander ausführen, bis man den ggT direkt ablesen kann.

Ein Beispiel: $ggT(182; 130) = ggT(130; 52) = ggT(78; 52) = ggT(52; 26) = ggT(26; 26) = 26$

Bestimme auf diese Weise den ggT selbst gewählter Zahlen.

Erstelle eine Software, die mit diesem Verfahren den ggT zweier einzugebender Zahlen berechnet. Beispielsweise könntest Du Tabellenkalkulation verwenden oder mit einer Programmiersprache ein Programm erstellen.

Euklidischer Algorithmus mit Divisionen mit Rest

Der oben beschriebene Algorithmus hat den Nachteil, dass recht viele Schritte erforderlich sind, wenn große Zahlen gewählt werden. (Wie viele Schritte sind nötig, um damit $ggT(1000001; 2)$ zu berechnen?)

Eine wesentliche Verbesserung des Algorithmus wird erzielt, wenn man anstelle der Differenz $a - b$ den Rest bei der Division von a durch b betrachtet.

Beispielsweise ergibt die ganzzahlige Division von 23 durch 5 das Ergebnis 4 mit dem Rest 3, denn es ist $23 = 4 \cdot 5 + 3$.

Allgemein bezeichnen wir bei der ganzzahligen Division von a durch b den Rest mit r. Es ist also $0 \leq r < b$ und es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{N}_0$ mit $a = q \cdot b + r$.

Überlege Dir, warum folgende Aussagen zutreffen:

1) Wenn n die Zahlen a und b teilt, dann teilt n auch die Zahl $r = a - qb$.

2) Wenn n die Zahlen b und r teilt, dann teilt n auch die Zahl a.

3) Die Zahlen a und b haben genau die gleichen gemeinsamen Teiler wie die Zahlen b und r.

4) $ggT(a; b) = ggT(b; r)$

Mit der letzten Gleichung kann man anstelle des ggT von a und b den ggT von b und r suchen. Dieser Schritt kann so oft hintereinander ausführt werden, bis man den ggT direkt ablesen kann.

Ein Beispiel: $ggT(1000000; 124) = ggT(124; 64) = ggT(64; 60) = ggT(60; 4) = 4$

Bestimme auf diese Weise den ggT selbst gewählter Zahlen.

Erstelle eine Software, die mit diesem Verfahren den ggT zweier einzugebender Zahlen berechnet. Verwende beispielsweise Tabellenkalkulation oder eine Programmiersprache.

Weiterforschen

Recherchiere zum Euklidischen Algorithmus weiter – beispielsweise im Internet oder in der mathematischen Literatur. Erkunde beispielsweise seine Bedeutung in Zusammenhang mit Kettenbrüchen oder in der Geometrie.