# Skalarprodukte

Im Folgenden können Sie Ihre bisherigen Vorstellungen zu Skalarprodukten schärfen und erweitern.

## Rückblick

1. In welchen Zusammenhängen sind Ihnen bislang Skalarprodukte begegnet?
2. Erklären Sie möglichst genau, was Sie unter einem Skalarprodukt verstehen.
3. Wozu können Sie Skalarprodukte nutzen?
4. Welche Rechengesetze kennen Sie für Skalarprodukte? Können Sie diese begründen?

Mit einem Skalarprodukt wird jeweils zwei Vektoren eine reelle Zahl zugeordnet. Über Eigenschaften dieser Zuordnung können Skalarprodukte in beliebigen Vektorräumen über definiert werden.

## Definition

Es sei ein Vektorraum mit einer Addition von Vektoren und einer Multiplikation   
 reeller Zahlen mit Vektoren.

Eine Abbildung , die jeweils zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet, heißt *Skalarprodukt*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

* Für alle gilt: (positive Definitheit)
* Für alle gilt: (Symmetrie)
* Für alle gilt: (Additivität)
* Für alle und gilt: (Homogenität)

## Beispiel: Standard-Skalarprodukt im

Aus dem Mathematikunterricht ist Ihnen das sog. Standard-Skalarprodukt für den Raum bekannt. Für Vektoren und ist dieses Skalarprodukt .

Weisen Sie nach, dass die dadurch definierte Abbildung alle Eigenschaften aus der obigen Definition für Skalarprodukte besitzt.

## Beispiel: Standard-Skalarprodukt im

Das vorherige Beispiel lässt sich von auf mit beliebigem verallgemeinern. Weisen Sie nach, dass durch

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert ist.

## Beispiel: Skalarprodukt von Funktionen

Betrachtet wird der Vektorraum aller auf dem Intervall stetigen Funktionen. Für zwei solche Funktionen und definieren wir:

Zeigen Sie, dass hierdurch ein Skalarprodukt definiert ist.

Geben Sie zwei Funktionen und an, die nicht konstant Null sind und für die gilt:

## Weitere Eigenschaften von Skalarprodukten

Aus der Definition von Skalarprodukten lassen sich weitere Eigenschaften ableiten, die damit für alle Skalarprodukte gelten. Folgern Sie aus der Definition:

1. Für den Nullvektor gilt:
2. Für alle gilt:
3. Für alle gilt:
4. Für alle und gilt:

## Längen und Winkel

In einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt können Längen und Winkel definiert werden.

1. Für einen Vektor heißt die Zahl *Länge* oder *Betrag* von .
2. Für zwei Vektoren ist der *Winkel* zwischen und festgelegt durch:
3. Zwei Vektoren nennt man *orthogonal* oder *senkrecht zueinander*, wenn .

## Beispiel:

Wenden Sie die vorige Definition auf den Raum mit dem Standard-Skalarprodukt an. Verdeutlichen Sie sich, dass diese Definition im Einklang mit den Begriffen der Länge, des Winkels und der Orthogonalität steht, die Sie seit vielen Jahren kennen.

## Beispiel:

Berechnen Sie Längen und Winkel zu selbst gewählten Vektoren im Raum mit dem Standard-Skalarprodukt.

Finden Sie möglichst viele Vektoren im Raum , die allesamt paarweise zueinander orthogonal sind.